

Archimedes, die Quadratur der Parabel und das
Axiom der Archimedischen Ordnung

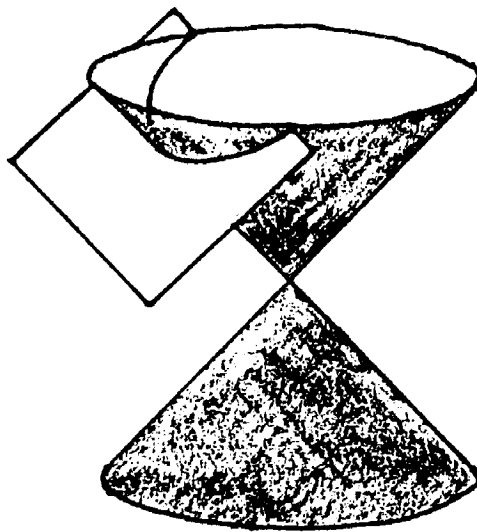
o.Univ.Prof.Dr. J. Hejtmanek,
Mathematisches Institut der Universität Wien
Strudlhofgasse 4, 1090-Wien

§ 0 Einleitung

In den letzten Jahren habe ich mit Studenten der Mathematik und Altphilologie vier Seminare über griechische mathematische Texte abgehalten. Wir haben das 1. und das 10. Buch der "Elemente" des Euklid und einen Brief des Archimedes "Über die Quadratur der Parabel", den er an seinen Freund Dositheos geschrieben hat, in der Originalsprache gelesen, übersetzt und philologisch und mathematisch interpretiert. Sinn dieser Seminare war das tiefere Eindringen in die Ideenwelt griechischer Mathematiker, und zwar sowohl aus der Grammatik der griechischen Sprache heraus, als auch mit dem Ziel, die eigene mathematische Forschungsarbeit und damit die Lehrtätigkeit anzuregen und zu verbessern. Dies möchte ich die historische Methode in der reinen und angewandten Mathematik nennen. Aus diesen Seminaren sind bis heute drei Hausarbeiten hervorgegangen, nämlich der "Euklidische Algorithmus und die Anthyphairesis", die "Darstellung großer Zahlen bei Archimedes und heute" und die "Quadratur der Parabel". Von letzterer Arbeit, die von Frau Magister Primmer verfaßt wurde, werde ich in diesem Vortrag ausführlich Gebrauch machen.

Archimedes lebte von 287 bis 212 vor Christus, die meiste Zeit in seiner Vaterstadt Syrakus, einer dorischen Kolonie in Sizilien. Deshalb ist seine Sprache ein dorischer Dialekt, während die "Elemente" des Euklid etwa um 300 vor Christus in Alexandria in der *κοινή*, der "gemeinsamen Sprache", verfaßt wurden, in der auch die Evangelien geschrieben sind.

Der Brief des Archimedes an seinen Freund und Kollegen Dositheos ist mit τετραγωνισμος παραβολης überschrieben, was mit Umwandlung eines Parabelabschnittes in ein Viereck zu übersetzen ist. Dieser Titel geht nicht auf Archimedes zurück, weil er das Wort παραβολη nicht verwendet, sondern sie mit "Schnitt eines orthogonalen Kegels" umschreibt; siehe die folgende Abbildung:



Die Einteilung meines Vortrages orientiert sich am Aufbau des Briefes:

τετραγωνισμος παραβολης :

- a) Vorwort (mit Formulierung des Archimedischen Axioms),
- b) Eigenschaften der Parabel (Satz 1-5, teilweise ohne Beweis),
- c) der "mechanische" Beweis (Satz 6-17, Anwendung des Archimedischen Axioms),
- d) der "geometrische" Beweis (Satz 18-24, Anwendung des Archimedischen Axioms).

§ 1 Vorwort des Briefes

Es folgt die Übersetzung des Vorwortes mit Bemerkungen dazwischen:
"Archimedes grüßt Dositheos: Wir hörten, daß Konon gestorben ist, der uns gegenüber voll Freundschaft war, daß Du mit ihm befreundet warst und daß Du in der Geometrie sehr bewandert bist."

Archimedes verwendet den pluralis majestaticus. Wenn heute in mathematischen Arbeiten das "wir" verwendet wird, dann in folgendem Sinn: Es wird damit der Schreiber und der Leser in eine Gemeinschaft zusammengefaßt.

"Wir haben seinen Tod mit großem Schmerz vernommen, da er uns ein Freund war, und da er in der Mathematik bewundernswert war. Wir beschlossen, Dir einen Brief zu schreiben, wie wir früher an Konon geschrieben haben, und zwar über geometrische Sätze, die bis jetzt unbewiesen waren, aber jetzt von uns durchschaut wurden, die zuerst von uns auf mechanische Weise gefunden, dann aber auch auf geometrische Weise bewiesen wurden. Von denen, die in der Geometrie bewandert sind, haben einige versucht darüber zu schreiben, ob es möglich ist, einen gegebenen Kreis oder Kreisabschnitt in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Sie haben auch versucht, einen Parabelabschnitt in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Sie haben dazu unbewiesene Lemmata benützt. Deshalb werden diese Quadraturen als nicht bewiesen angesehen.

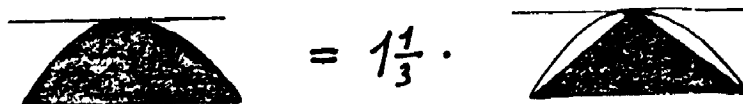
Das Wort Lemma kommt von λαμβανω, dh. ich nehme auf, und bedeutet etwas, das aufgenommen wurde und aus dem eine Einheit gemacht wurde. Lemma kann also bedeuten, etwas als Axiom, dh. als Forderung, annehmen, oder etwas als einen neuen Satz formulieren, der dann später bewiesen werden muß. Heute übersetzt man Lemma als Hilfssatz. Gewisse Hilfssätze können aber von fundamentaler Bedeutung sein, wie das Zornsche Lemma. Dieser kann man als Axiom oder als

Hilfssatz in der Mathematischen Logik auffassen. Dieser Hilfssatz wird etwa aus dem Auswahlaxiom bewiesen.

"Wir wissen, daß niemand von uns einen Parabelabschnitt in ein flächengleiches Quadrat verwandeln konnte. Dieses wurde jetzt von uns gefunden."

Es wird hier das Wort εὕρισκω, ich finde, verwendet. Heute versteht man unter der heuristischen Methode in der Mathematik den Weg, der zwar ungenau und nicht exakt, aber mit Intuition zum Ziel führt.

"Es wird gezeigt, daß der Parabelabschnitt flächengleich $\frac{1}{3}$ des Dreiecks mit gleicher Basis und Höhe ist:



Zum Beweis nehmen wir das folgende Lemma als richtig an: Es seien zwei ungleiche Flächenstücke gegeben. Die Differenz des größeren vom kleineren kann man zu sich selbst so oft hinzufügen, bis sie ein weiteres gegebenes Flächenstück übertrifft."

Heutige Formulierung dieses Axioms: $\forall a > 0, \forall b > 0, b - a > 0, \forall c > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot (b - a) > c$. Sinnvollerweise wird dieses Axiom gebraucht, wenn $b - a$ klein und c groß ist. Es ist also der Sinn dieses Axioms, daß man jede kleine positive Größe endlich oft addieren kann und damit jede große positive Größe übertreffen kann. Wenn Sie für $b - a$ den Radius des Atomkernes in cm, etwa 10^{-12} , und für

c die Schulden der VÖEST, in ÖS, setzen, dann ist $n=10^{24}$, der Loschmidtschen Zahl, gleich.

"Schon früher haben Geometer dieses Lemma benützt und haben gezeigt, daß sich die Kreisfläche wie die zweite Potenz des Radius und der Kugelinhalt wie die dritte Potenz des Radius verhält, und mit Hilfe eines ähnlichen Lemmas, daß die Pyramide gleich $\frac{1}{3}$ des Prismas mit gleicher Basis und Höhe und ein Kegel gleich $\frac{1}{3}$ des Zylinders mit gleicher Basis und Höhe ist. Jeder der angeführten Theoremata wird genauso für wahr gehalten, wie Theoremata, die ohne dieses Lemma auskommen."

Nach Archimedes gibt es also zwei Klassen von geometrischen Sätzen, solche, die ohne das Archimedische Axiom auskommen, und solche, die es benötigen. Es soll uns immer bewußt sein, ob und an welcher Stelle im Beweis eines Satzes ein bestimmtes Axiom benötigt wird.

"Mir genügt es, wenn das, was ich herausgegeben habe, für genauso richtig gehalten wird, wie das, was jene durchgeführt haben. Wir haben die Beweise zusammengeschrieben, wie wir sie zuerst mit Hilfe der Mechanik durchschaut, und dann mit Hilfe der Geometrie bewiesen haben. Zuerst aber wird über die Grundlagen der Kegelschnittslinien geschrieben werden, alles das, was wir für unseren Beweis benötigen.

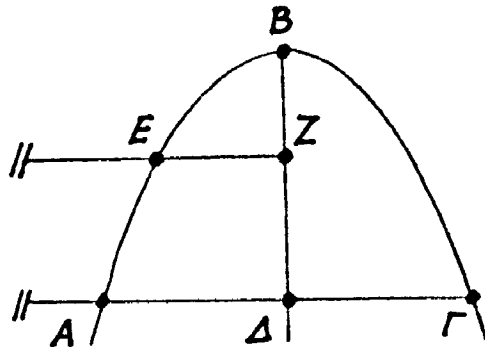
Lebe wohl!"

§ 2 Eigenschaften der Parabel

Die ersten drei Sätze werden bei Archimedes ohne Beweis angeführt.

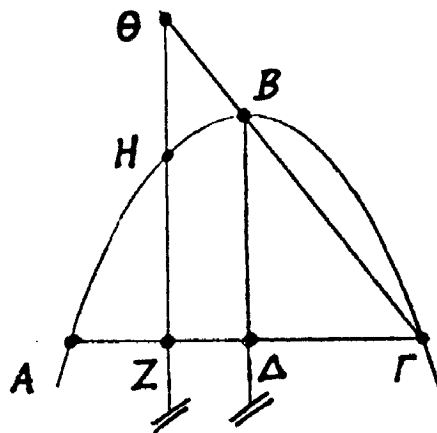
Satz 3: Es sei ein Parabelabschnitt mit Basis $A\Gamma$ gegeben, und es sei Δ der Mittelpunkt der Basis $A\Gamma$. Wenn EZ parallel zur Basis $A\Gamma$ ist, dann gilt

$$\frac{\Delta A^2}{\Delta B} = \frac{ZE^2}{ZB}$$

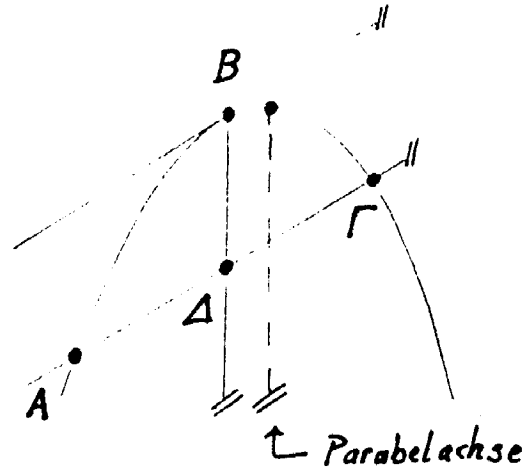


Dies folgt sofort aus der Darstellung der Parabel durch die Funktion $y = x^2$, dh. $\frac{x^2}{y} = \text{Konstante}$. Archimedes bemerkt, daß dies alles in den Grundlagen über Kegelschnittlinien (z.B. bei Euklid) gezeigt wird. Satz 4 und 5 werden bei Archimedes bewiesen. Ich formuliere beide Sätze und überlasse die Beweise als Übungsbeispiel Ihnen:

Satz 4: $\Theta Z : \Theta H = \Delta A : \Delta Z$

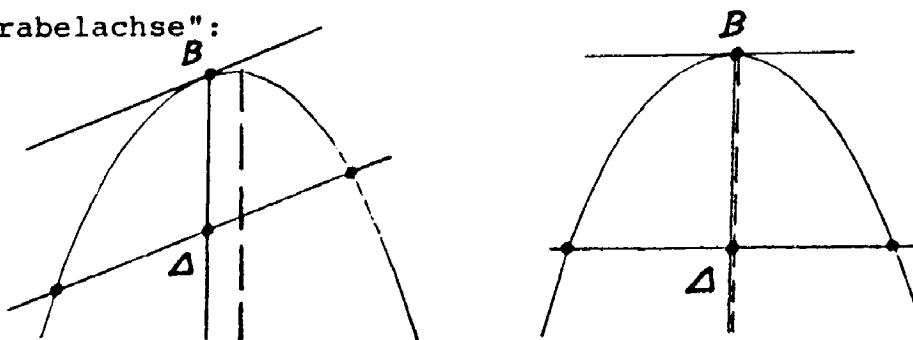


Satz 1: Es sei ein Parabelschnitt mit Basis $A\Gamma$ gegeben. Wenn B jener Punkt auf der Parabel ist, dessen Tangente parallel zur Basis $A\Gamma$ ist, und wenn Δ der Schnittpunkt der Geraden durch B , die parallel zur Parabelachse ist, mit die Basis $A\Gamma$ ist, dann ist $A\Delta = \Delta\Gamma$.



Es gilt auch die Umkehrung: Wenn Δ die Basis $A\Gamma$ halbiert, und wenn die Gerade durch Δ , die parallel zur Parabelachse ist, die Parabel in B schneidet, dann ist die Tangente in B parallel zur Basis $A\Gamma$.

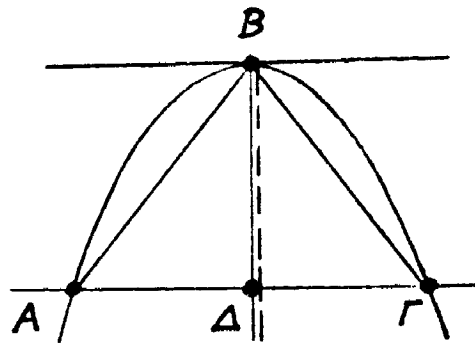
Bemerkung: Archimedes unterscheidet den allgemeinen Fall " $B\Delta$ ist parallel zur Parabelachse" und den speziellen Fall " $B\Delta$ ist die Parabelachse":



Wir können sagen, daß beide Fälle durch affine Transformation der Ebene auseinander hervorgehen. Eine solche Transformation hat die folgenden Eigenschaften:

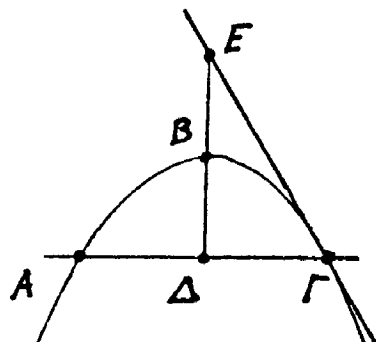
- a) Die Parabel geht in eine Parabel über,
- b) eine Tangente geht in eine Tangente über,
- c) parallel Gerade gehen in parallel Gerade über,
- d) Gerade, die parallel zur Achse sind, gehen in Gerade, die parallel zur Achse sind über,
- e) Verhältnisse von Strecken bleiben erhalten und
- f) Verhältnisse von Flächen bleiben erhalten.

Es genügt also, das spezielle Parabelsegment $AB\Gamma$ zu untersuchen, wobei B der Scheitel der Parabel ist:



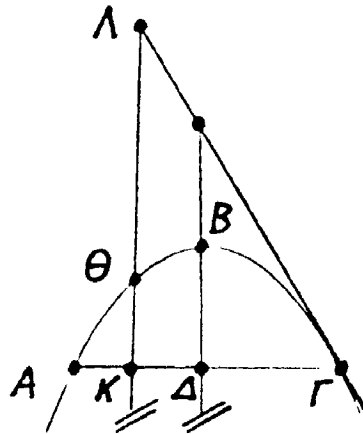
Wenn wir also zeigen, daß das Parabelsegment $AB\Gamma = \frac{1}{3}$ Dreieck $AB\Gamma$ im speziellen Fall ist, dann gilt das auch für den allgemeinen Fall.

Satz 2: (Konstruktion der Tangente an eine Parabel): Es sei ein Parabelabschnitt mit Basis $A\Gamma$ gegeben. Es sei Δ der Mittelpunkt der Basis $A\Gamma$. Wenn die Gerade durch Δ , die parallel zur Parabelachse ist, die Parabel in B schneidet, und wenn die Tangente in Γ diese Gerade in E schneidet, dann ist $\Delta B = BE$:



Satz 5: Es sei $\Gamma\Lambda$ die Tangente in Γ an die Parabel. Dann gilt:

$$\Theta\Lambda : \Theta K = K\Gamma : KA$$

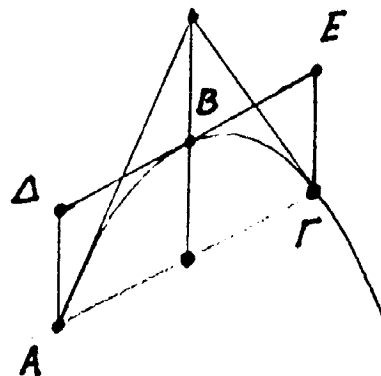


§ 3 Der geometrische Beweis

Bei Archimedes wird im letzten Satz, dh. im Satz 24, bewiesen, daß der Parabelabschnitt = $1\frac{1}{3}$ Dreieck mit gleicher Basis und Höhe ist. Zum Beweis benötigen wir mehrere Ergebnisse, die wir jetzt zusammenstellen und teilweise beweisen werden.

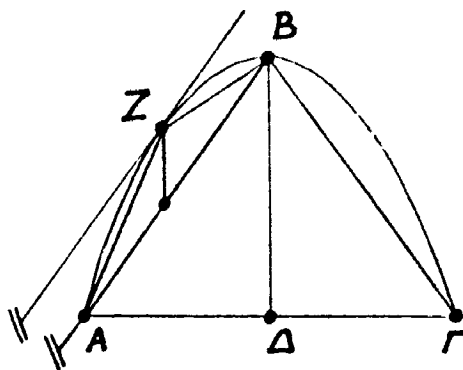
Satz 20: Dreieck mit gleicher Basis und Höhe $>\frac{1}{2}$ Parabelabschnitt.

Beweis: Der Parabelabschnitt wird, wie üblich, mit $AB\Gamma$ bezeichnet. Wir zeichnen das Parallelogramm $A\Gamma E\Delta$, wobei $A\Delta$ und ΓE parallel zur Parabelachse sind:

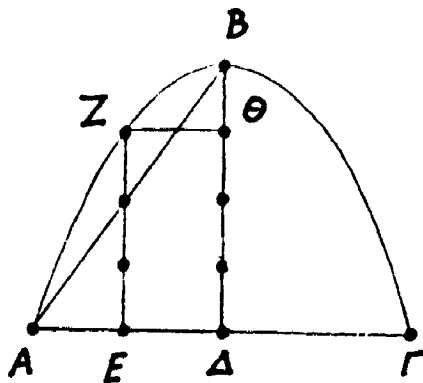


Aus der Konstruktion der Tangenten in A und in Γ folgt, daß der Parabelabschnitt ganz im Parallelogramm liegt. Wir erhalten somit: Parabelabschnitt $AB\Gamma <$ Parallelogramm $A\Gamma E\Delta = 2 \cdot$ Dreieck $AB\Gamma$, was zu beweisen war.

Satz 21: Der Parabelabschnitt wird, wie üblich, mit $AB\Gamma$ bezeichnet. Das Dreieck AZB hat dieselbe Basis und Höhe wie der Parabelabschnitt ABZ . Dann gilt: Dreieck $AZB = \frac{1}{8}$ Dreieck $AB\Gamma$.



Beweis: Durch Z legen wir eine Gerade, die parallel zu $A\Gamma$ ist. Diese schneidet $B\Delta$ in θ .

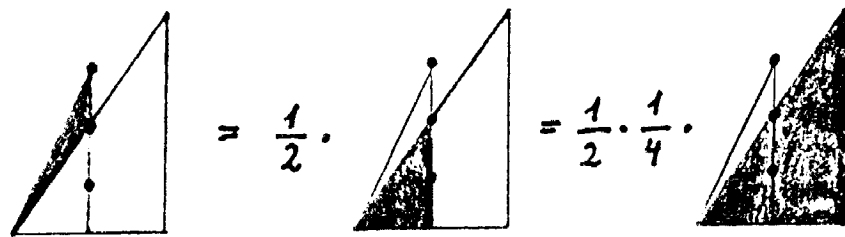


Aus der Eigenschaft der Parabel (siehe Satz 3) folgt, daß

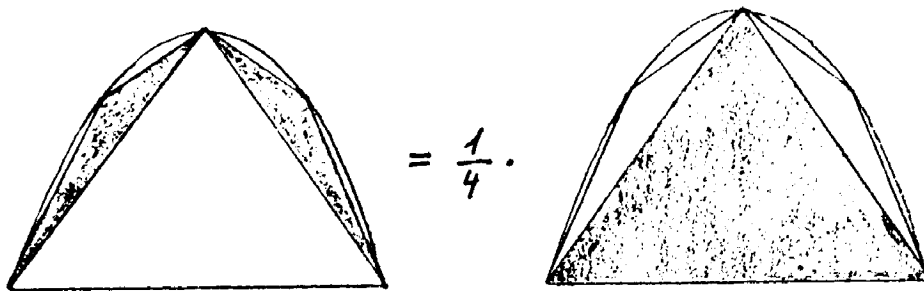
$$\Delta A^2 : \theta Z^2 = B\Delta : B\theta$$

Weil $\Delta A = 2 \Delta E$ und $\Delta E = OZ$ ist, so ist $BO = \frac{1}{4} BA$.

Der Beweis des Satzes folgt dann aus der folgenden Zeichnung:



Korollar zu Satz 21: Es gilt:



Wir können nun das folgende Iterationsverfahren beschreiben:
Die Summe aller Dreiecke im $(n+1)$ -ten Schritt ist gleich $\frac{1}{4}$ der Summe aller Dreiecke im n -ten Schritt, wobei $n=1,2,3,\dots$, dh.

$$F_{n+1} = \frac{1}{4} F_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots:$$



Wir haben bis jetzt nur gezeigt, daß aus den Eigenschaften der Parabel folgt, daß $F_2 = \frac{1}{4} F_1$ ist. Durch vollständige Induktion zeigt man, daß $F_{n+1} = \frac{1}{4} F_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Die Methode der vollständigen Induktion wird bei Euklid und Archimedes verwendet, ohne daß sie diese genauer beschrieben.

Wir zitieren jetzt aus dem 10. Buch der "Elemente" des Euklid den Satz 1: Es seien zwei positive Größen $a_0 > 0$ und $\epsilon_0 > 0$ gegeben (Der interessante Fall ist jener, bei dem a_0 sehr groß und ϵ_0 sehr klein ist). Wir bilden:

$$\begin{aligned} a_1 &:= a_0 - b_0, \text{ wobei } b_0 > \frac{1}{2} a_0 \text{ ist,} \\ a_2 &:= a_1 - b_1, \text{ wobei } b_1 > \frac{1}{2} a_1 \text{ ist,} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &:= a_n - b_n, \text{ wobei } b_n > \frac{1}{2} a_n \text{ ist.} \end{aligned}$$

Dann existiert eine natürliche Zahl n , sodaß $a_n < \epsilon_0$ wird. Der Beweis dieses Satzes benötigt das Archimedische Axiom. Wir werden auf den Beweis im folgenden Abschnitt näher eingehen. Soviel aber sei bemerkt, daß $a_n < \frac{1}{2^n} a_0$ ist, und somit $a_n < \epsilon_0$, wenn nur n genügend groß gewählt wird.

Satz 23 (Archimedes): Es sei F_1 gegeben, und es sei $F_{n+1} = \frac{1}{4} F_n$, $n=1,2,3,\dots$, rekursiv gegeben. Dann gilt:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n + \frac{1}{3} F_n = \frac{4}{3} F_1$$

Beweis: In der Sprechweise der heutigen Analysis ist die Partialsumme der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots$ durch

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$$

zu berechnen. Archimedes führt diesen Beweis allein mit Hilfe geometrischer Überlegungen, die unserer heutigen analytischen Methode zugrundeliegen.

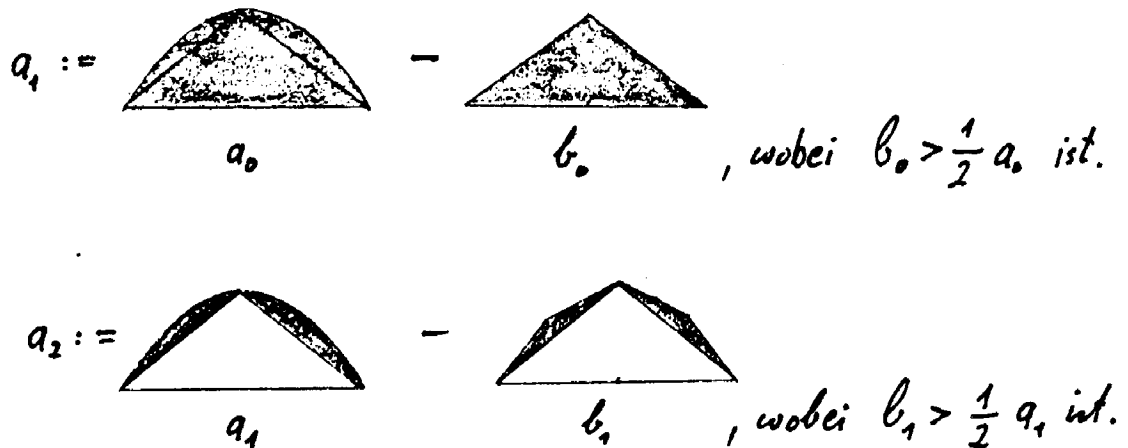
Nach allen diesen Vorbereitungen können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 24 (Archimedes)

Parabelabschnitt = $1\frac{1}{3}$ · Dreieck mit gleicher Basis und Höhe.

Beweis: Zur Abkürzung schreiben wir $P :=$ Parabelabschnitt und $K := \frac{4}{3}$ · Dreieck mit gleicher Basis und Höhe. F_1, F_2, \dots, F_n seien, wie vorhin, definiert. Die Archimedische Beweisidee ist, sowohl die Annahme $K < P$, als auch die Annahme $K > P$ auf einen Widerspruch zu führen. Es handelt sich also um zwei indirekte Beweise.

Angenommen, es sei $K < P$. Dann ist $\epsilon_0 := P - K > 0$. Wir beschreiben das folgende Verfahren:



Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n < \epsilon_0$. An dieser Stelle geht das Archimedische Axiom in der Form von Satz 1, Buch 10 der "Elemente" des Euklid ein. Aus

$$P - (F_1 + F_2 + \dots + F_n) = a_n < \epsilon_0 = P - K$$

folgt, daß $F_1 + F_2 + \dots + F_n > K$ ist.

Nach den Archimedischen Axiom ist ein endliches Vielfaches von $\Delta Z = \epsilon_0$ größer als $AB = a_0$. Dies soll bereits mit zwei Schritten erreicht sein, dh.

$$3 \epsilon_0 = \Delta Z + ZH + HE > AB = a_0$$

Wir subtrahieren von der linken Seite weniger als die Hälfte von ΔE , nämlich HE , und von der rechten Seite mehr als die Hälfte von AB , nämlich OB . Dann bleibt die Ungleichung erhalten:

$$\Delta Z + ZH > AO.$$

Wir machen nochmals dasselbe mit ZH links und KO rechts:

$$\Delta Z > AK, \text{ dh } \epsilon_0 > a_3$$

Ende des Beweises.

Euklid beschränkt sich auf diesen einfachen Fall (dh. $a_3 < \epsilon_0$); der allgemeine Fall folgt leicht.

Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die reellen Zahlen \mathbb{R} sind Archimedisch geordnete Körper. \mathbb{R} ist vollständig, \mathbb{Q} ist es nicht. Das Wort "vollständig" kann in zweifacher Weise verstanden werden:

- a) vollständig bezüglich der Norm des absoluten Betrages
 $\|x\| := |x|$, $x \in \mathbb{R}$ dh. jede Cauchy-Folge ist eine konvergente Folge, und
- b) vollständig bezüglich der Ordnung, dh. jede nach oben beschränkte Menge hat eine kleinste obere Schranke (= Supremum).

Andererseits folgt aus Satz 23 (Archimedes) $F_1 + F_2 + \dots + F_n + \frac{1}{3}F_n = K$,
und somit $F_1 + F_2 + \dots + F_n < K$.

Beides führt auf einen Widerspruch. Also ist $K < P$ falsch.

Angenommen, es sei $K > P$. Dann ist $\epsilon_0 := K - P > 0$.

Aus $F_1 + F_2 + \dots + F_n + \frac{1}{3}F_n = K$ folgt, daß

$$K - (F_1 + F_2 + \dots + F_n) = \frac{1}{3}F_n < F_n$$

ist. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F_n < \epsilon_0$. Aus dieser Stelle geht
wieder das Archimedische Axiom ein. Aus

$$K - (F_1 + F_2 + \dots + F_n) < K - P$$

folgt, daß $F_1 + F_2 + \dots + F_n > P$ ist.

Andererseits ist aber $F_1 + F_2 + \dots + F_n < P$.

Beides führt auf einen Widerspruch. Also ist $K > P$ falsch.

Bemerkung: Archimedes hat gezeigt, daß beide Aussagen $K < P$ und
 $K > P$ falsch sind, und folgert daraus, intuitiv, daß $K = P$ sein muß.
Wir fügen hinzu: Wenn man dem Parabelabschnitt eine positive
reelle Zahl als Flächeninhalt zuordnen kann, und wenn die reellen
Zahlen ein vollständig Archimedisch geordneter Körper sind, dann
ist $K = P$. Es ist wohl klar, warum man diese Methode die Exhaustions-
methode (von exhaurire ... ausschöpfen) nennt.

§ 4 Das Axiom der Archimedischen Ordnung

In diesem Abschnitt werden wir einige Formulierungen und einige
Folgerungen des Archimedischen Axioms behandeln. Während bei
Archimedes, "Über die Quadratur der Parabel", das Axiom in der
Form

$$\forall a > 0, \forall b > 0, b > a, \forall c > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot (b - a) > c$$

geschrieben wird, wo wird es in der heutigen Analysis (siehe z.B. Hewitt-Stromberg, "Real and Abstract Analysis") folgendermaßen formuliert:

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot b > a.$$

Wie gesagt, ist dieser Formulierung nur für großes a und kleines b sinnvoll. Eine äquivalente Formulierung ist

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{a}{n} < b.$$

Daraus folgt die in der Analysis wichtige Schlußweise:

Wenn $|a| < \frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a=0$.

Als Beispiel dazu sei der in der Analysis geführte Beweis der Eindeutigkeit des Limes einer Folge reeller Zahlen angeführt: Angenommen, es seien a und a' zwei Limiten ein- und derselben Folge (a_n) . Aus

$$|a-a'| \leq |a-a_n| + |a_n-a'|$$

folgt $|a-a'| < \epsilon$, für jedes positive ϵ , insbesondere für $\epsilon = \frac{1}{n}$, und somit $a=a'$.

Archimedes und seine mathematischen Zeitgenossen hatten Schwierigkeiten, dieses Axiom (oder Lemma, wie Archimedes es nennt) zu erfassen. Dies geht aus dem Vorwort seines Briefes an Dositheos hervor, wo er schreibt, daß es Sätze gibt, die man ohne dieses Axiom beweisen kann, und Sätze, zu deren Beweis man dieses Axiom braucht. Wahrscheinlich hat er versucht, dieses Lemma zu beweisen, und es ist ihm nicht gelungen. Aus meiner Vorlesung Analysis I habe ich die Erfahrung gewonnen, daß Studierende Schwierigkeiten mit der Schlußfolge " $\forall n \in \mathbb{N}, |a| < \frac{1}{n} \Rightarrow a=0$ " haben. Man hat also

in der historischen Entwicklung der Mathematik (zur Zeit von Euklid und Archimedes) dieselben Schwierigkeiten gefühlt, wie in der individuellen Entwicklung des Studierenden der Mathematik. In der Biologie hat man ein ähnliches Verhalten zum biogenetischen Grundgesetz erhoben: Die Phylogenese (=Stammentwicklung) ist parallel zur Ontogenese, dh. zur Entwicklung des Individuums.

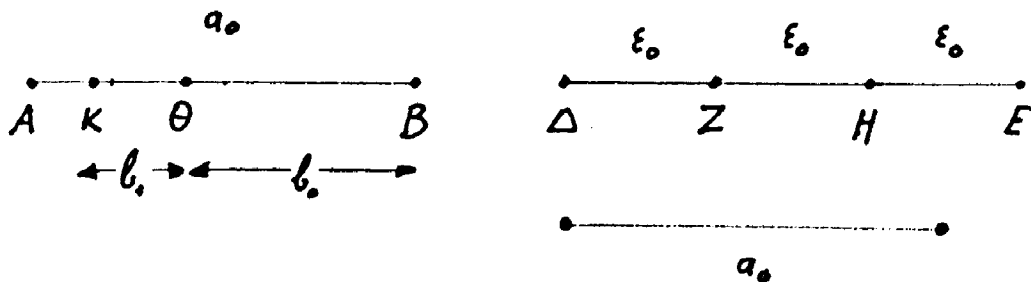
Wir haben Satz 1, Buch 10 der "Elemente" des Euklid bereits formuliert und angewendet. Ich möchte jetzt den Beweis nach Euklid und in seiner Schreibweise bringen.

Satz 1 (Euklid): Es seien zwei Größen $a_0 > 0$ und $\epsilon_0 > 0$ gegeben. wir bilden:

$$\begin{aligned} a_1 &:= a_0 - b_0, \text{ wobei } b_0 > \frac{1}{2} a_0 \text{ ist,} \\ a_2 &:= a_1 - b_1, \text{ wobei } b_1 > \frac{1}{2} a_1 \text{ ist,} \\ &\vdots \\ a_{n+1} &:= a_n - b_n, \text{ wobei } b_n > \frac{1}{2} a_n \text{ ist.} \end{aligned}$$

Dann existiert eine natürliche Zahl n , sodaß $a_n < \epsilon_0$ wird.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnung von Euklid, und nehmen mit ihm an, daß bereits $a_3 < \epsilon_0$ ist.

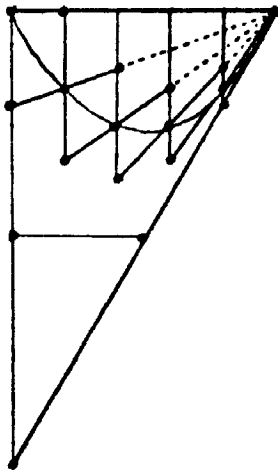


Beachten Sie, daß die Menge $\{1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$ eine obere Schranke hat, z.B. die obere Schranke 2. Sie hat keine kleinste obere Schranke in \mathbb{Q} , wohl aber eine in \mathbb{R} , nämlich $\sqrt{2}$.

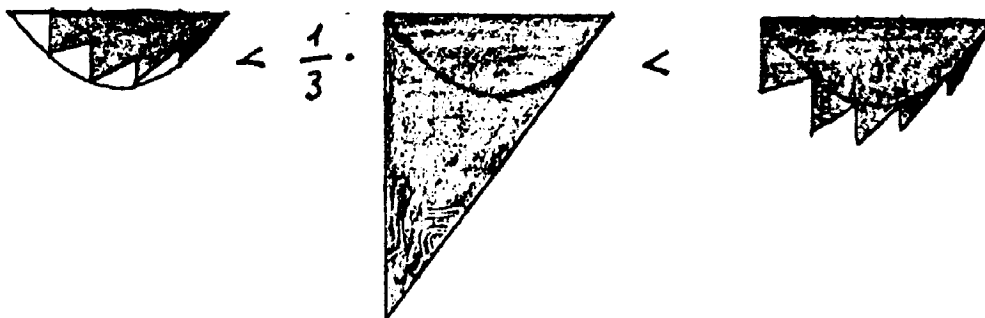
Die reellen Zahlen sind als vollständiger Archimedisch geordneter Körper eindeutig charakterisiert, in dem Sinne, daß jeder vollständige Archimedisch geordneter Körper isomorph (und zwar algebraisch und bezüglich der Ordnung) zu \mathbb{R} ist

§ 5 Bemerkungen zum mechanischen Beweis

Es ist nicht möglich hier den ganzen Beweis zu bringen; es seien aber einige Hinweise dazu gebracht. Wir machen die folgende Zeichnung, und beschränken uns mit Archimedes auf die Zerlegung der Basis des Parabelabschnittes in 5 Teile:



Satz 14:

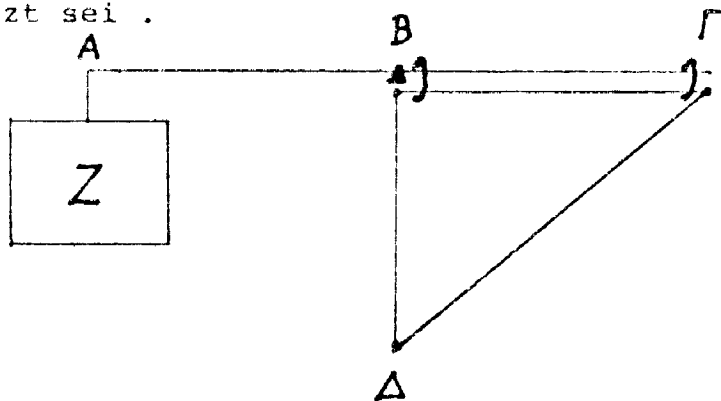


Der Beweis wird hier nicht gebracht. Wir wollen das Flächenstück auf der linken Seite der Ungleichung die Archimedische Untersumme des Parabelabschnittes und das Flächenstück auf der rechten Seite der Ungleichung die Archimedische Obersumme nennen. Dann ist Satz 14 äquivalent zur Aussage

$$\text{Archimedische Untersumme} < \frac{4}{3} \cdot \text{Fläche des Parabelabschnittes} < \text{Archimedische Obersumme}.$$

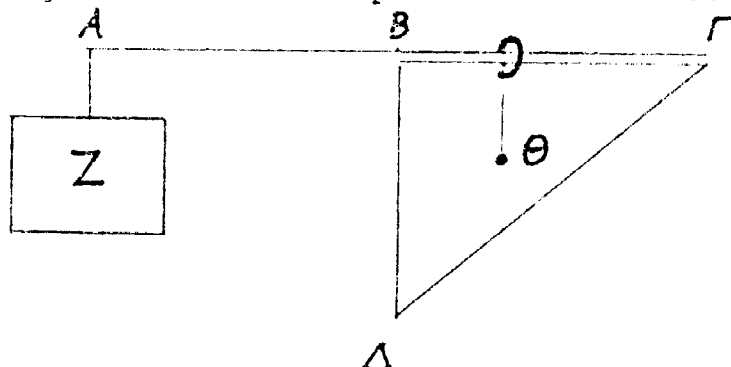
Wieder wird dann mit Hilfe des Archimedischen Axioms gezeigt werden, daß die Fläche des Parabelsegmentes nicht größer und nicht kleiner als $\frac{4}{3}$ Fläche des Dreiecks mit gleicher Basis und Höhe sein kann. Der Weg wird von Archimedes der mechanische Weg genannt, weil er im Beweis Sätze folgender Art verwendet:

Satz 6: Es sei ein Waagebalken ABΓ gegeben, der in B unterstützt sei .



Es sei das rechtwinkelige Dreieck ΔBF in B und Γ am Waagebalken aufgehängt. Wenn $Z = \frac{1}{3} \cdot \Delta BF$ ist, dann ist Gleichgewicht.

Beweis: Wir ersetzen die Aufhängung in B und Γ durch eine Aufhängung über dem Schwerpunkt Θ des Dreiecks:



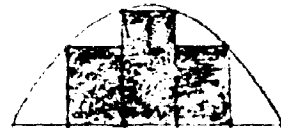
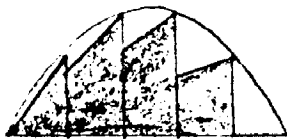
Nach dem Hebelgesetz ist dann Gleichgewicht, wenn

$$\text{Kraft} \cdot \text{Kraftarm} = \text{Last} \cdot \text{Lastarm}$$

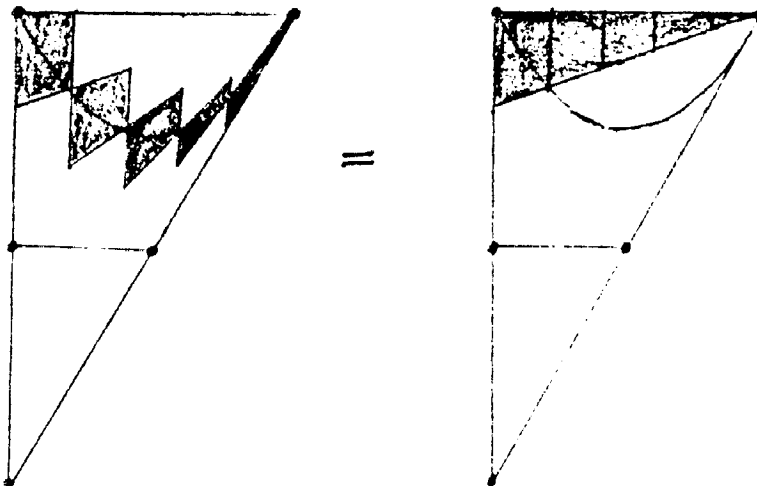
ist, dh. $Z \cdot 1 = \Delta B\Gamma \cdot \frac{1}{3}$.

Ende des Beweises.

Die Archimedische Ober- und Untersumme des Parabelabschnittes erinnert uns an die Riemannsche Ober- und Untersumme:



Es erhebt sich die Frage, warum Archimedes eine Summe dieser Art gewählt hat. Die Antwort auf diese Frage ist, daß er mit Hilfe geometrischer Eigenschaften der Parabel zeigen kann (Satz 16), daß



dh. die Differenz zwischen Archimedischer Obersumme und Archimedischer Untersumme ist dem rechts gezeichneten Dreieck gleich, und dieses Dreieck kann man beliebig klein machen, wenn man die Zerlegung hinreichend fein wählt. Dies ist der Vorteil in der Wahl der Archimedischen Summen, gegenüber dem Riemannschen Summen, wo man diesen Schluß nicht machen kann.

§ 6 Nichtstandard Analysis

Aus dem Archimedischen Axiom folgt, daß es keine unendlich kleine positive reelle Zahl geben kann, dh. wenn $a \geq 0$, und wenn $a \leq \frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $a = 0$. Mit solchen infinitesimalen Zahlen hat aber Leibnitz intuitiv in seiner Differential-, und Integralrechnung gearbeitet und damit Erfolg gehabt. In den letzten Jahrzehnten hat man sich mit einer Exaktifizierung des Rechnens mit infinitesimalen Zahlen befaßt. Die Erweiterung des Zahlbegriffs führt auf die nichtstandard reellen Zahlen (oder hyperreellen Zahlen) und auf die Nichtstandard Analysis. In diesem Abschnitt sei einiges im Zusammenhang mit dem Archimedischen Axiom darüber gesagt.

Die reellen Zahlen sind abbrechende und nichtabbrechende Dezimalbrüche, mit denen man intuitiv rechnen kann. Zusätzlich ist es möglich, die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen heraus zu konstruieren. Man geht dazu folgendermaßen vor:

$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ sei die Menge aller Folgen rationaler Zahlen, dh. $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $a_k \in \mathbb{Q}$. Aus dieser Menge greift man die Cauchy-Folgen heraus, und führt eine Äquivalenzrelation ein:

$$(a_k) \sim (b_k): \quad (a_k - b_k) \text{ ist eine Nullfolge.}$$

Dann ist die Menge der Äquivalenzklassen (a_k) von Cauchy-Folgen

isomorph zu \mathbb{R} .

Wenn man versucht, diese Konstruktion mit reellen Zahlen, statt mit rationalen Zahlen, durchzuführen, dann erhält man nur wieder \mathbb{R} . Bei der Konstruktion der hyperreellen Zahlen geht man ähnlich vor:

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei die Menge aller Folgen reeller Zahlen, dh. $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $a_k \in \mathbb{R}$. Man führt eine Äquivalenzrelation so geschickt ein, daß die Menge der Äquivalenzklassen (a_k) möglichst viele gute Eigenschaften hat, z.B. auch Eigenschaften der infinitesimalen Zahlen. Bei diesem technischen Problem der Einführung der Äquivalenzrelation sei auf die Lehrbücher der Nichtstandard Analysis verwiesen. Es sei nur erwähnt, daß die Nullfolgen dann nicht in einer Klasse, sondern in unendlich viele Klassen zerfallen. Diese nennt man die Monade von Null, nach Leibniz, und die Elemente der Monade von Null die infinitesimalen Zahlen. Für die nichtstandard reellen Zahlen gilt das Archimedische Axiom nicht, dh. man kann nicht folgen: Wenn $a \geq 0$, und wenn $a < \frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $a = 0$, sondern nur, daß a eine positive infinitesimale Zahl ist. Zum Verständnis sei darauf verwiesen, daß $(n \cdot a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, wieder eine Nullfolge ist, wenn $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge war. Mit den nichtstandard reellen Zahlen x und dx kann man, wie Leibniz es schon gemacht hat, intuitiv rechnen. Es sei als Beispiel die Tangentenrichtung der Parabel $y = x^2$ bestimmt:

$$\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = 2x+dx.$$

Hier ist x eine standard reelle Zahl und dx eine nichtstandard reelle infinitesimale Zahl.

Zwischen den rationalen Zahlen liegen also die reellen Zahlen, und weiters zwischen den reellen Zahlen die nichtstandard reellen Zahlen. Insbesondere fächert sich die reelle Zahl Null zur Monade von Null auf.

Zusammenfassend kann man folgendes aussagen: 1) Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} sind ein Archimedisch geordneter Körper, 2) Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind ein vollständig Archimedisch geordneter Körper und 3) Die hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ sind ein geordneter Körper, der nicht Archimedisch geordnet und nicht vollständig ist. In ${}^*\mathbb{R}$ gibt es unendlich kleine (infinitesimale) und unendlich große (infinite) Zahlen.

§ 7 Schlußworte

Zum Abschluß meines Vortrages möchte ich einige Worte zum tragischen Tod des größten griechischen Mathematikers und eines der größten Mathematiker aller Zeiten sagen. Hannibal mußte sich nach seinem Sieg über die Römer bei Cannae im Jahre 216 vor Christus nach Karthago zurückziehen. Seine Flotte berührte auch Syrakus auf Sizilien. Dies machten die Römer den Bewohnern von Syrakus zum Vorwurf und begannen die Stadt zu belagern. Archimedes hat seine Kenntnisse aus Mechanik und Optik zum Bau von Verteidigungsmaschinen seiner Heimatstadt zur Verfügung gestellt. Damals war das - im Gegensatz zu heute - eine Selbstverständlichkeit für einen Naturwissenschaftler. Die Römer eroberten 212 vor Christus die Stadt. Archimedes starb unter dem Schwert eines Soldaten, obwohl der römische Consul Metellus den Befehl gegeben hatte, Archimedes lebend zu ihm zu bringen.

Archimedes war, als er starb, über 70 Jahre alt und arbeitete gerade an einem Problem mit Kreisen.